# Autovalores y Autovectores - Diagonalización

Última edición: 09/11/2009

## 1. Autovalores y Autovectores

Sea $A \in K^{nxn}$ (matriz cuadrada):

### 1.1. Definición

$\lambda \in K$ es *autovalor* (ava) de $A$ si existe $v \in K^n$, no nulo ($v \neq 0_{K^n}$) tal que $\boxed{A.v = \lambda v}$. $v$ se denomina como *autovector* (ave) de $A$ asociado al ava $\lambda$.

### 1.2. Polinomio Característico

$\lambda$ ava de $A \iff A.v = \lambda.v \iff A.v - \lambda.v = 0_{K^n} \iff (A - \lambda I).v = 0_{K^n} \iff v \in Nul(A - \lambda I) \iff Nul(A - \lambda I) \neq \{0_{K^n}\}$ (pues $v \neq 0_{K^n}$) $\iff \det(A - \lambda I) = 0$ (pues $rg(A - \lambda I)$ debe ser menor a $n$).

En conclusión: $\boxed{\lambda \text{ ava de } A \iff \det(A - \lambda I) = 0}$, donde $\det(A - \lambda I)$ se denomina como el *polinomio característico* de $A$ y se denota como $p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado $n$ y sus raíces son los autovalores de $A$.

**Obs:** Algunos profesores escriben "$(\lambda I - A).v$" en vez de "$(A - \lambda I).v$", pero no es dificil ver que cualquiera de las dos formas esta bien.

**Multiplicidad Algebraica:** Se la denota como $m_a(\lambda)$ y se la denomina como la multiplicidad de $\lambda$ como raíz del polinomio característico. (Es decir, si es raíz doble, simple, triple, etc.)

#### 1.2.1. Propiedades:

$(a)$ Son equivalentes:
$a_1$. $\lambda$ ava de $A$
$a_2$. $\det(A - \lambda I) = 0$
$a_3$. $Nul(A - \lambda I) \neq \{0\}$
$a_4$. $rg(A - \lambda I) < n$
$(b)$ Si $A \in K^{2x2} \longrightarrow \boxed{p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda.tr\,(A) + \det\,(A)}$

dem) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}.a_{12} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} = \lambda^2 - \lambda.tr\,(A) + \det\,(A)$

$(c)$ $\boxed{tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \lambda_1 + \lambda_2 + ....... + \lambda_n$

$(d)$ $\boxed{det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i} = \lambda_1.\lambda_2........\lambda_n$

dem.b y c) Para 2x2: Si $\alpha_1$ y $\alpha_2$ son autovalores de $A \longrightarrow p_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1).(\lambda - \alpha_2) = \lambda^2 - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1.\alpha_2 \iff \alpha_1 + \alpha_2 = tr(A) \wedge \alpha_1.\alpha_2 = \det(A)$

$(e)$ $\boxed{\lambda = 0 \text{ es ava de } A \iff \det(A) = 0}$ ($A$ singular) $\iff rg(A) < n$

$(f)$ Si $A$ es triangular (superior o inferior) $\longrightarrow$ <u>sus avas son los elementos de la diagonal principal.</u>

Ej.) Si $A = \begin{pmatrix} 832 & 123 \\ 0 & 321 \end{pmatrix} \longrightarrow$ avas de A: 832 y 321

$(g)$ Si $A$ es triangular por bloques $\longrightarrow det(A) = de(A_{11}).\det(A_{22})$ siendo $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0_{(n-p)xp} & A_{22} \end{pmatrix}$ y $A$ de $nxn$, $A_{11}$ de $pxp$, $A_{12}$ de $px(n-p)$ $A_{22}$ de $(n-p)x(n-p)$

Entonces $det(A-\lambda I) = det(A_{11}-\lambda I).\det(A_{22}-\lambda I) \longrightarrow p_A(\lambda) = p_{A_{11}}(\lambda).p_{A_{22}}(\lambda)$

$\longrightarrow$ $\boxed{\lambda \text{ es ava de } A \iff \lambda \text{ es un ava de } A_{11} \text{ o de } A_{22}}$

(y la suma de los avas de $A_{11}$ más los de $A_{22}$ nos da todos los avas de $A$)

$(h)$ Si $A \in K^{nxn} \longrightarrow \boxed{m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + ...... + m_a(\lambda_r) = n}$ siendo $\lambda_i \neq \lambda_j$

$(i)$ Sea $\lambda$ ava de $A$ y $v$ el ave de $A$ asociado a $\lambda \longrightarrow A.v = \lambda.v \iff (A-\lambda I).v = 0 \iff \boxed{v \in Nul(A-\lambda I)}$

## 1.3. Autoespacio Asociado

Se define como el autoespacio de $A \in K^{nxn}$ (o subespacio propio de A) asociado al autovalor $\lambda \in K$ a:

$\boxed{S_\lambda = Nul(A-\lambda I)} = \{v \in K^n \ / \ A.v = \lambda v\}$

Este subespacio contiene a todos los autovectores de A asociados al autovalor $\lambda$ y su dimensión se denomina *multiplicidad geométrica de* $\lambda$. $(m_g(\lambda))$:

$\boxed{dim(S_\lambda) = m_g(\lambda)}$

**Observación:** $dim(Nul(A-\lambda I)) + rg(A-\lambda I) = n \longrightarrow rg(A-\lambda I) = n - m_g(\lambda)$
Si $rg(A-\lambda I) < n. \longrightarrow \det(A-\lambda I) = 0 \longrightarrow \lambda$ es ava de $A$

### 1.3.1. Propiedades

$(a)$ $\boxed{\text{Aves asociados a avas distintos son LI}}$

dem) Debemos demostrar que si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \longrightarrow \{v_1, v_2\}$ LI siendo $v_1, v_2$ aves asociados a $\lambda_1, \lambda_2$ respectivamente.
Entonces demostremos que $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$
$\lambda_2.(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2) = 0 \longrightarrow \alpha_1.\lambda_2.v_1 + \alpha_2.\lambda_2.v_2 = 0$ (1)
$A.(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2) = 0 \longrightarrow \alpha_1.A.v_1 + \alpha_2.A.v_2 = 0 \longrightarrow \alpha_1.\lambda_1.v_1 + \alpha_2.\lambda_2.v_2 = 0$ (2)
$(1)-(2) : \alpha_1.(\lambda_2.v_1 - \lambda_1.v_1) = 0 \longrightarrow \alpha_1.(\lambda_2-\lambda_1).v_1 = 0$ ; $v_1 \neq 0$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2 \longrightarrow \underline{\alpha_1 = 0}$
$\longrightarrow$ si $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 = 0 \longrightarrow \alpha_2.v_2 = 0 \iff \underline{\alpha_2 = 0}$

$(b)$ $\forall$ autovalor $\lambda$ de $A$ se cumple que: $\boxed{1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)}$

$(c)$ $\boxed{\text{La suma de autoespacios es directa.}}$ Es decir, $S_{\lambda_1} + S_{\lambda_2} + ..... + S_{\lambda_r} = S_{\lambda_1} \oplus S_{\lambda_2} \oplus ..... \oplus S_{\lambda_r} = S$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$

$(d)$ Si $A \in K^{nxn}$ es diagonal por bloques, es decir $A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0_{px(n-p)} \\ 0_{(n-p)xp} & A_{22} \end{pmatrix}$ con $A_{11}$ de $pxp$ y $A_{22}$ de $(n-p)\,x\,(n-p)$ entonces:

$d_1)$. $\boxed{\text{Si } v \in K^{px1} \text{ es ave de } A_{11} \longrightarrow \begin{pmatrix} v \\ 0_{(n-p)x1} \end{pmatrix} \text{ es ave de } A.}$

dem) $\begin{pmatrix} A_{11} & 0_{px(n-p)} \\ 0_{(n-p)xp} & A_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v \\ 0_{(n-p)x1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}.v \\ 0_{px1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.v \\ 0_{px1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ 0_{px1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} v \\ 0_{(n-p)x1} \end{pmatrix}$
es ave de $A$

$d_2)$ $\boxed{\text{Si } w \in K^{(n-p)x1} \text{ es ave de } A_{22} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0_p \\ w \end{pmatrix} \text{ es ave de } A.}$ (demostración similar)

$(e)$ $\boxed{\text{Si } A \text{ es semejante a } B \longrightarrow A \text{ y } B \text{ tienen los mismos autovalores.}}$
dem)

## Matrices Semejantes

Sean $A \in K^{nxn}$, $B \in K^{nxn}$

**Definición:** $A$ es *semejante* a $B$ si existe $P \in K^{nxn}$ inversible tal que: $B = P^{-1}AP$ ó $A = PBP^{-1}$

Notación: $A \sim B$
Entonces sean A y B dos matrices semejantes, veamos que $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ :
$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I)$ ; sabiendo que $I = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$ :
$p_B(\lambda) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P)$ ; y por propiedad del determinante $det(A.B) = det(A).det(B)$ :
$p_B(\lambda) = \det(P^{-1}). \det(A - \lambda I). \det(P)$ ; pero $det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$
$\longrightarrow p_B(\lambda) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$.

**Recordar:** $\boxed{\text{Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico}}$

**Caso particular:** $[T]_{BB} = C_{B'B}[T]_{B'B'}C_{BB'}$ . En este caso $\boxed{[T]_{BB} \sim [T]_{B'B'}}$ y $C_{B'B} = (C_{BB'})^{-1}$

**Observar:** $\boxed{\text{Si } A \sim B \text{ entonces } det(A) = det(B) \text{ y } tr(A) = tr(B)}$, recordando que la traza es la suma de los autovalores, etc.

# 2. Diagonalización

Sea $A \in K^{nxn}$ (matriz cuadrada):

## 2.1. Definición

$A$ es *diagonalizable* (dgz) si es semejante a una matriz diagonal $D \in K^{nxn}$, es decir, existe $P \in K^{nxn}$ inversible tal que $\boxed{A = PDP^{-1}}$

**Teorema:** $\boxed{A \text{ es diagonalizable} \iff \text{existe una base de } K^n \text{ formada por autovectores de } A}$
dem)

$(\Rightarrow)$ $A$ es dgz $\longrightarrow A = PDP^{-1} \longrightarrow AP = PD \longrightarrow A[P_1P_2...P_n] = [P_1P_2...P_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\longrightarrow [AP_1AP_2...AP_n] = [\lambda_1P_1\lambda_2P_2...\lambda_nP_n]$

$$\longrightarrow \begin{cases} AP_1 = \lambda_1 P_1 \\ AP_2 = \lambda_2 P_2 \\ \vdots \qquad \vdots \\ AP_n = \lambda_n P_n \end{cases}$$

$rg(P) = n$ por ser inversible $\longrightarrow \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ es LI $\longrightarrow$ es una base de $K^n$ formada por autovectores de $A$.
$(\Leftarrow)$ Sea $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ base de $K^n$ con $v_1, v_2, ..., v_n$ aves de A asociados a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$:
$A \stackrel{?}{=} PDP^{-1}$
$AP \stackrel{?}{=} PD$

Propongo $P = [v_1, v_2, ..., v_n]$ y $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ y entonces verifico que: $AP = PD$.
Entonces A es diagonalizable pues es semejante a una matriz diagonal.

## 2.2. Propiedades

$(a)$ Si $A \in C^{nxn}$ $n$ avas distintos $\longrightarrow A$ es diagonalizable **(no se cumple la recíproca)**
$(b)$ Si $A \in R^{nxn}$ $n$ avas reales distintos $\longrightarrow A$ es diagonalizable **(no se cumple la recíproca)**
dem) Si $A$ tiene $n$ avas distintos $\longrightarrow$ habrán $n$ autovectores LI asociados a cada autovalor pues aves asociados a avas distintos son LI $\longrightarrow$ existirá una base de $K^n$ formada por $n$ autovectores de $A \longrightarrow A$

es diagonalizable. Pero que hallan $n$ autovectores LI de $A$ no significa que cada uno esté asociado a un autovalor distinto y que en consecuancia hallan $n$ avas distintos.

$(c)$ $\boxed{A \text{ es diagonalizable } \iff S_{\lambda_1} \oplus S_{\lambda_2} \oplus ..... \oplus S_{\lambda_r} = K^n \iff m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)}$ $\forall\ \lambda_i$ autovalor de $A$.

dem) Como demostramos anteriormente, la suma de autoespacio es directa. Pero si A es diagonalizable entonces existe base de $K^n$ formada por aves de A, entonces si los aves forman base de $K^n$, entonces la suma de los autoespacios formará todo $K^n$, es decir cualquier vector de $K^n$ podrá ser combinación lineal de los autovectores de A. De esta forma, si la suma directa de los autoespacios nos da todo $K^n$, entonces la suma de las∘ dimensiones (las multiplicidades geométricas) nos dará $n$:

$m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + .... + m_g(\lambda_r) = n$

Y por propiedad $m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + ...... + m_a(\lambda_r) = n$ , y la otra propiedad dice que $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$ $\longrightarrow m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$

## 2.3. Polinomios Matriciales

Dada $A \in R^{nxn}$ y dado un polinjomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + .... + a_mx^m$ con $a_0, a_1, a_2, ...., a_m \in R$ se define un *polinomio matricial* como $p(A) = a_0 + a_1A + a_2A^2 + .... + a_mA^m$

### 2.3.1. Propiedades

$(a)$ $\boxed{Av = \lambda v \longrightarrow p(A)v = p(\lambda)v}$ Esto significa que si $\lambda$ es ava de $A$ entonces $p(\lambda)$ es ava de $p(A)$, y si $v$ es autovector de $A$ asociado a $\lambda$ entonces $v$ es autovector de $p(A)$ asociado a $p(\lambda)$.

dem) Si $Av = \lambda v \longrightarrow A^2v = A\lambda v = \lambda^2 v,\ \ A^3v = A\lambda^2 v = \lambda^3 v,$ .......... , $A^mv = \lambda^m v$ y $A^0v = \lambda^0 v$ (convención: $A^0 = I$)

Luego: $p(A)v = \left(a_0 + a_1A + a_2A^2 + .... + a_mA^m\right)v = a_0Iv + a_1Av + a_2A^2v + .... + a_mA^mv = a_0\lambda^0 v + a_1\lambda v + a_2\lambda^2 v + .... + a_m\lambda^m v = \left(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + .... + a_m\lambda^m\right)v = p\left(\lambda\right)v$

$(b)$ $\boxed{\text{Si } A \text{ es diagonalizable} \longrightarrow p(A) \text{ es diagonalizable}}$

dem) Si $A \in R^{nxn}$ es diagonalizable entonces existe $P \in R^{nxn}$ inversible formada por aves de $A$ y $D \in R^{nxn}$ diagonal que contiene a todos los avas de $A$ tal que $A = PDP^{-1}$.

Luego, $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}$.... en definitiva: $A^m = PD^mP^{-1}$

Ahora, si aplico el polinomio p: $p(A) = p\left(PDP^{-1}\right) = a_0 + a_1PDP^{-1} + a_2PD^2P^{-1} + .... + a_mPD^mP^{-1} = P\left[a_0 + a_1D + a_2D^2 + .... + a_mD^m\right]P^{-1} = Pp(D)P^{-1}$

con $p(D)$ diagonal que contiene a todos los avas de $p(A)$: $p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$. Los aves de $A$ y $p(A)$ son los mismos, por lo tanto concluimos que $\underline{p(A) \text{ es diagonalizable}}$

**Obs:** Tener muy en cuenta la propiedad que se utilizó que dice: $\boxed{\text{Si } A = PDP^{-1} \longrightarrow p(A) = Pp(D)P^{-1}}$

$(c)$ **Teorema de Cayley-Hamilton:** $\boxed{p_A(A) = 0}$ siendo $p_A(\lambda)$ el polinomio característico de una matriz $A$ cuadrada.

dem. para matrices dgz) De acuerdo a la propiedad anterior si $A = PDP^{-1} \longrightarrow p(A) = Pp(D)P^{-1}$ para cualquier polinomio. En particular, para el polinomio característico $p_A(D) = 0_{R^{nxn}}$ pues $p_A(\lambda_1) = 0$, $p_A(\lambda_2) = 0, ...., p_A(\lambda_n) = 0 \longrightarrow \underline{p_A(A) = 0}$

# 3. Avas y Aves de un Endomorfismo Lineal

Sea el endomorfismo $T : V \longrightarrow V$ (TL), siendo $V$ un $K$-ev:

## 3.1. Definición

$\lambda \in K$ es autovalor de T si $\exists\ v \in V$ no nulo tal que $\boxed{T(v) = \lambda v}$. $v$ es el autovector de $T$ asociado al autovalor $\lambda$.

## 3.2. Propiedades

$(a)$ $\boxed{\lambda \text{ es ava de } T \iff \lambda \text{ es ava de } [T]_{BB}}$ siendo $B$ base de $V$.

$(b)$ $\boxed{v \in V \text{ es ave de T} \iff x = [v]_B \in K^n \text{ es ave de } [T]_{BB}}$

dem.$a$ y $b$) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $dim(V) = n$, $B$ base de $V$ y $[T]_{BB}$ matriz asociada a $T$ :
$T(v) = \lambda v \iff [T(v)]_B = [\lambda v]_B$ ; $[T(v)]_B = [T]_{BB}.[v]_B$ (prop. del apunte de TL)
$\iff [T]_{BB}.[v]_B = \lambda\,[v]_B \iff \lambda$ es ava de $[T]_{BB}$ y $[v]_B$ ave de $[T]_{BB}$ asociado a $\lambda$

$(c)$ $\boxed{p_T(\lambda) = p_A(\lambda)}$ siendo $A = [T]_{BB}$ (notar que $A$ podría ser $[T]_{B'B'}$ o con cualquier otra base $V$ recordando que estas matrices serán semejantes y por lo tanto tendrán el mismo polinomio característico)

## 3.3. Diagonalización de un Endomorfismo Lineal

Sea $T : V \longrightarrow V$, y $dim(V) = n$ :

**3.2.1. Definición:** $\boxed{T \text{ es diagonalizable si existe una base } C \text{ en } V \text{ tal que } [T]_{CC} \text{ es diagonal}}$

**Teorema:** $\boxed{T \text{ es diagonalizable} \iff \text{existe una base } C \text{ en } V \text{ formada por autovectores de } T}$

**3.2.2. Propiedad:** $\boxed{\text{Si } C \text{ es una base de } V \text{ formada por autovectores de } T \longrightarrow [T]_{CC} \text{ es diagonal}}$

dem) Sea $C = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ entonces:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ T(v_2) &= \lambda_2 v_2 \\ &\vdots \\ T(v_n) &= \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Ahora: $[T(v_i)]_B = [\lambda v_i]_B = \lambda\,[v_i]_B \longrightarrow [T(v_1)]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $[T(v_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ; ... ; $[T(v_n)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow [T]_{CC} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = D \text{ siendo } C \text{ la base formada por autovectores de } T$$

De esta forma si T es diagonalizable entonces $[T]_{BB} = P\,[T]_{CC}\,P^{-1}$ para cierta base $B$ de $V$. $C$ es la base de autovectores de $T$, $P = C_{CB}$ y $P^{-1} = C_{BC}$. Además las columnas de $P$ son los autovectores de $[T]_{BB}$.

# 4. Subespacios Invariantes

## 4.1. Definición

$S$ es un subespacio invariante por $A$ (o $A$-estable) si $\forall\ v \in S,\ Av \in S$

## 4.2. Propiedad

$\boxed{\text{Si } S \text{ es autoespacio de } A \longrightarrow S \text{ es invariante por } A}$ (no vale la recíproca) (y $S^{\perp}$ también es invariante por $A$)

**Observación:** Si $S$ es invariante por $A$ y $dim(S) = 1 \longrightarrow S$ es autoespacio de $A$ (en este caso si vale la recíproca, en los demás no necesariamente). Esto es claro, pues si $S = gen\,\{v\}$ y $Av \in S \rightarrow Av = \alpha v \longrightarrow$ $v$ es autovector de $A$ y claramente $S$ es autoespacio de $A$. Pero ya con $dim(S) = 2$ se ve que no se cumple necesariamente.

**Observación 2:** Si en un enunciado nos piden hallar una matriz $A$ tal que un subespacio $S$ es invariante por $A$, entonces generalmente es muy útil proponer que $S$ sea autoespacio de $A$, entonces hallamos un $A$ que cumple con la condición de que $S$ es invariante por $A$, pues por hipótesis es autoespacio. Pero de ningún modo significa que $S$ invariante por $A$ implica $S$ autoespacio de $A$.